



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

Ejercicios sugeridos para :

los temas de las clases del 30 de junio y 2 de julio de 2009.

**Temas :**

Autovalores y autovectores.  
Matrices similares; diagonalización.  
Diagonalización ortogonal de matrices reales simétricas.  
Secciones 6.1 , 6.3, 6.4 del texto.

**Observación importante:**

es muy importante que Usted resuelva también muchos ejercicios del texto.

**E1.-** Para cada una de las siguientes matrices halle :

**i)** el polinomio característico ;

**ii)** todos los autovalores ;

**iii)** para cada autovalor, el correspondiente autoespacio;

**iv)** para cada autovalor, la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica.

**Recuerde que :** el polinomio característico  $p_A(\lambda)$ , de la matriz (cuadrada),  $A$ , es igual al determinante de la matriz  $(A-\lambda I)$  y los ceros de este polinomio son los autovalores de  $A$ ;  
El autoespacio,  $E_{\lambda_1}$ , asociado a un autovalor,  $\lambda_1$ , es el espacio nulo,  $N_{A-\lambda_1 I}$ ,

de la matriz  $(A-\lambda_1 I)$  ;

la multiplicidad geométrica  $mg(\lambda_1)$ , del autovalor  $\lambda_1$  es la dimensión del correspondiente autoespacio,  $E_{\lambda_1}$ , es decir, la nulidad de la matriz  $(A-\lambda_1 I)$ ;

la multiplicidad algebraica del autovalor  $\lambda_1$  es el exponente del factor  $(\lambda - \lambda_1)$  en la factorización del polinomio característico. Por ejemplo si para cierta matriz  $10 \times 10$  fuese  $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^4 (\lambda - \lambda_3)^3 (\lambda - \lambda_4)$  entonces las multiplicidades algebraicas de los cuatro autovalores serían :  $mg(\lambda_1)=2$  ,  $ma(\lambda_2)=4$  ,  $ma(\lambda_3)=3$  ,  $ma(\lambda_4)=1$  .

**Recuerde tambien que :** siempre se cumple que  $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ .

$$\mathbf{E1a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E1b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}; \mathbf{E1c)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E1d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{E1e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{E1f)} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \mathbf{E1g)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**E2.-** Dos matrices  $A$ ,  $B$ , se llaman similares o semejantes, si y sólo si existe una matriz invertible,  $P$ , tal que  $P^{-1}AP = B$  [o, en forma equivalente :  $AP=PB$  ].

**E2a)** Demuestre que matrices cuadradas similares tienen el mismo polinomio característico;

**E2b)** Demuestre que no es cierto que matrices cuadradas similares tienen los mismos autovectores;



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

**E2c)** Demuestre que **no es cierto** que matrices equivalentes por filas tienen el mismo polinomio característico.

**E3.-** Demuestre que si  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , son autovectores asociados a los autovalores, respectivamente, 4, 5, de cierta matriz,  $A$ , [es decir :  $A\mathbf{u} = 4\mathbf{u}$ ,  $A\mathbf{v} = 5\mathbf{v}$  ], entonces  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  son linealmente independientes.

**E4.-** Demuestre que si  $\mathbf{u}$  es autovector asociado a la matriz  $A$ , entonces  $\mathbf{u}$  también es autovector asociado a las matrices  $2A$ ,  $A^2$  y si  $A$  es invertible, también  $A^{-1}$ .

**E5.-** Para cada una de las siguientes afirmaciones, diga, justificando, si es cierta o falsa :

**E5a)** Dos autovectores diferentes (de una misma matriz,  $A$ ), siempre son ortogonales;

**E5b)** dos autovectores asociados al mismo autovalor,  $\lambda$ , de una matriz,  $A$ , no pueden ser ortogonales;

**E5c)** existen matrices triangulares superiores, para las cuales la multiplicidad geométrica de un autovalor es estrictamente mayor que la multiplicidad algebraica del mismo;

**E5d)** la multiplicidad geométrica de un autovalor siempre es  $\geq 1$  ;

**E5e)** El autoespacio  $E_\lambda$  asociado al autovalor  $\lambda$  de una matriz,  $A$ , es el espacio nulo de la matriz  $A - \lambda I$  ;

**E5f)**  $n$  autovectores, asociados a autovalores diferentes (de una misma matriz  $A$ ) siempre son linealmente independientes;

**E5g)** Si el polinomio característico de una matriz,  $A$ , de tamaño  $n \times n$  es producto de  $n$  factores de primer grado diferentes entonces existe una base de  $n$  autovectores (de  $A$ ) para  $\mathbb{R}^n$ .

**E5h)** La suma de dos autovectores (de una misma matriz  $A$ ) siempre es un autovector.

**E6)** demuestre que si  $B = P^{-1}AP$  y si  $\mathbf{u}$  es autovector de  $A$  asociado al autovalor  $\lambda$ , entonces  $\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{u}$  es autovector de  $B$  asociado al mismo autovalor.

**E7)** Diga si es cierto o falso que si  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  son autovectores de una matriz real simétrica asociados a autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  diferentes, ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ), entonces  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  son ortogonales.

**E8.-** Sean  $A$  una matriz de tamaño  $n \times n$ ,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$   $n$  autovectores de  $A$  (no necesariamente L.I.), asociados a los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $H$  la matriz cuya  $k$ -ésima columna es el vector  $\mathbf{a}_k$ ,  $D = [g_{i,k}]$  una matriz diagonal con  $g_{k,k} = \lambda_k$  [ y, por supuesto,  $g_{i,k} = 0$  si  $i \neq k$  ]. Verifique que entonces se tiene :  $AH = HD$ .

**E9.-** Explique por qué, si  $P$  es una matriz cuyas columnas son autovectores linealmente independientes de  $A$  entonces  $P^{-1}AP$  es una matriz diagonal.

**E10.-** Diga, justificando, cuales de las siguientes matrices son diagonalizables y en caso afirmativo halle una matriz,  $P$ , invertible, tal que  $P^{-1}HP$  sea diagonal.



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

[Observe que las matrices que se escriben a continuación ya se estudiaron en el ejercicio **E1** de este problemario ] .

$$\begin{aligned} \mathbf{E10a)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E10b)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}; \mathbf{E10c)} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{E10d)} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{E10e)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{E10f)} & \begin{bmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \mathbf{E10g)} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**E11.-** Diga, justificando, cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuales falsas :

**E11a)** Si  $A$  es diagonalizable e invertible, entonces  $A^{-1}$  también es diagonalizable ;

**E11b)** Si una matriz real,  $A$ , es diagonalizable "ortogonalmente" [es decir : existe  $Q$  ortogonal, tal que  $Q^{-1}AQ = D =$  matriz diagonal ] entonces necesariamente  $A$  es simétrica [es decir :  $A^t = A$  ] ;

**E11c)** toda matriz triangular superior es diagonalizable ;

**E11d)** la matriz "identidad" ,  $I_n$ , es diagonalizable ;

**E11e)** Si una matriz triangular superior,  $A$ , tiene todos los elementos de su diagonal diferentes [es decir :  $a_{i,i} = a_{k,k} \Rightarrow i=k$  ] entonces necesariamente  $A$  es diagonalizable; [ver **E5f,g**].

**E11f)** Si una matriz triangular superior,  $A$ , tiene dos o más elementos de su diagonal iguales, entonces  $A$  no puede ser diagonalizable;

**E11g)** Se puede demostrar [no se ha demostrado en nuestro curso] que toda matriz real simétrica,  $A$ , de tamaño  $n \times n$ , siempre tiene  $n$  autovectores linealmente independientes; también se demuestra [ver ejercicio **E7** de este problemario ] que autovectores de una matriz real simétrica, asociados a autovalores diferentes, son perpendiculares.

¿ implica esto que toda matriz real simétrica,  $A$ , se puede diagonalizar "ortogonalmente" ? [es decir : ¿ existe  $Q$  ortogonal, tal que  $Q^{-1}AQ = D =$  matriz diagonal ?] ;

**E12.-** Diagonalice cada una de las siguientes matrices [es decir : para cada una,  $H$ , halle  $P$  invertible, tal que  $P^{-1}HP = D =$  matriz diagonal ] ;

$$\mathbf{E12a)} A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{E12b)} B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{E12c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 17 \end{bmatrix}; \mathbf{E12d)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

**E13.-** Los autovalores de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  son :  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  ; Halle dos matrices invertibles, P, H, tales que :  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  ,  $H^{-1}AH = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  .

**E14.-** Diagonalice ortogonalmente las matrices del ejercicio **E12** .

[es decir: para cada una, H, halle Q ortogonal, tal que  $Q^{-1}HQ = D = \text{matriz diagonal}$  ] ;

**E15.-** Si una matriz, D, es diagonal, es inmediato verificar que para toda potencia de exponente entero, n, se tiene  $D^n = [(d_{i,k})^n]$  ; entonces, si A es una matriz diagonalizable y si  $P^{-1}AP = D = \text{diagonal}$ , se tiene :  $A = PDP^{-1}$  ,  $A^n = (PDP^{-1})^n = P(D^n)P^{-1}$  .

Dada la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  , use este método para hallar  $A^{10}$  .

## respuestas.

**SE1a)**  $p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ ;  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ ;  $E_{-1} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ ;  $E_3 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ;  
 $ma(-1) = mg(-1) = 1$  ;  $ma(3) = mg(3) = 1$  ;

**SE1b)**  $p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2\lambda & -\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$   
 $= \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 14\lambda^2 = \lambda^2(-\lambda + 14) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 14$  ;

$E_0 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ;  $E_{14} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$  ;  $ma(0) = mg(0) = 2$  ,  $ma(14) = mg(14) = 1$  .

**SE1c)**  $p_C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$  ; esta matriz no tiene autovalores reales; sus dos autovalores complejos son  $1 \pm i$  , ambos de multiplicidad geométrica y algebraica = 1 ;

$E_{1-i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$  ,  $E_{1+i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$  ;

**SE1d) ojo** : no se definen autovalores ni autovectores para matrices no cuadradas;



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

$$\mathbf{SE1e)} \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = 5; E_{-1} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}; E_5 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\};$$

$$\text{ma}(-1) = \text{ma}(5) = 2; \text{mg}(-1) = \text{mg}(5) = 2;$$

$$\mathbf{SE1f)} \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 9; E_5 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, E_7 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, E_9 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right\};$$

los tres autovalores tienen multiplicación algebraica y geométrica = 1;

$$\mathbf{SE1g)} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0; E_0 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}; \text{ma}(0) = 3, \text{mg}(0) = 1.$$

$$\mathbf{SE2a)} p_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}| \cdot |(A - \lambda I)| \cdot |P| = |(A - \lambda I)| = p_A(\lambda).$$

$$\mathbf{SE2b)} \text{ Por ejemplo : sean } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 21 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ambas matrices, A, B tienen autovalores  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ ;  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  es autovector de A, asociado

a  $\lambda_1 = 1$ , sin embargo  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  no es autovector de B, ya que  $B \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 27 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

[ Nota : para mayores detalles, vea la solución del ejercicio **E6** ].

**SE2c)** Si fuese cierto que matrices equivalentes por filas tienen el mismo polinomio característico, entonces toda matriz no singular (es decir: con determinante no nulo, equivalente por filas a la matriz identidad) debería tener todos sus autovalores iguales a 1.

Basta observar entonces que toda matriz diagonal, con determinante no nulo, tiene por autovalores los elementos de su diagonal, los cuales pueden ser números (no nulos)

cualquiera; por ejemplo considere la matriz  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  o la matriz de tamaño  $1 \times 1$ : [7].

La matriz  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  tiene autovalores  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$  y es equivalente por filas a la matriz identidad cuyos autovalores son todos = 1.

$$\mathbf{SE3)} x_1 \mathbf{u} + x_2 \mathbf{v} = \mathbf{o} \Rightarrow A(x_1 \mathbf{u} + x_2 \mathbf{v}) = 4x_1 \mathbf{u} + 5x_2 \mathbf{v} = A\mathbf{o} = \mathbf{o};$$

$$\begin{cases} x_1 \mathbf{u} + x_2 \mathbf{v} = \mathbf{o} \\ 4x_1 \mathbf{u} + 5x_2 \mathbf{v} = \mathbf{o} \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

**SE4)**  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Rightarrow \begin{cases} 2A\mathbf{u} = 2\lambda\mathbf{u} \\ A^2\mathbf{u} = A(A\mathbf{u}) = A(\lambda\mathbf{u}) = \lambda A\mathbf{u} = \lambda^2\mathbf{u} \end{cases}$  ; por otra parte, si A tiene inversa,

también se tiene :  $\mathbf{u} = A^{-1}(A\mathbf{u}) = A^{-1}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda A^{-1}(\mathbf{u})$  de donde  $A^{-1}(\mathbf{u}) = \lambda^{-1}\mathbf{u}$  .

Por lo tanto queda demostrado que  $\mathbf{u}$  es autovector de  $2A$ , asociado al autovalor  $2\lambda$ , es autovector de  $A^2$ , asociado al autovalor  $\lambda^2$ , es autovector de  $A^{-1}$ , asociado al autovalor  $\lambda^{-1}$ .

**SE5)** son ciertas d, e, f, g ; son falsas : a, b, c, h .

**SE5a)** si  $\mathbf{u}$  es autovector de A,  $2\mathbf{u}$  también lo es; como  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  ,  $\mathbf{u}$ ,  $2\mathbf{u}$  no son ortogonales. La afirmación **a** es falsa inclusive si se consideran autovectores asociados a autovalores diferentes [estos resultan perpendiculares si la matriz es simétrica, sin embargo esto no se cumple para matrices cualesquiera]; por ejemplo véanse los tres autovectores asociados, en **SE1f** a los autovalores 5, 7, 9.

**SE5b)** en el caso de la matriz B del ejercicio **SE1b)** el autovalor  $\lambda=0$  tiene multiplicidad geométrica =2, por lo cual en el autoespacio  $E_0$  seguramente hay dos autovectores (asociados al mismo autovalor) perpendiculares. Inclusive, usando el algoritmo de Gram-Schmidt Usted puede hallar una base ortonormal para  $E_0$ .

**SE5c)** para todo autovalor siempre se tiene  $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$  .

**SE5d)** Como los autovalores se calculan de manera que la matriz  $A-\lambda I$  tenga determinante nulo, el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es  $A-\lambda I$  siempre tiene soluciones no nulas, por lo cual el correspondiente autoespacio siempre tiene dimensión  $> 0$  .

**SE5f)** Se procede en forma análoga a la solución del ejercicio **E3)** ; para una demostración para un genérico entero positivo "n" habrá que usar el principio de inducción.

**SE5g)** por **SE5f)** se tienen n vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  .

**SE5h)** Esto sería cierto **sólo** en el caso que los dos autovectores fuesen asociados al mismo autovalor. Por ejemplo en el caso del ejercicio **E1a)** con la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  , los autovectores asociados al autovalor 1 son todos los múltiplos (no nulos) del vector (1, -1) , y los autovectores asociados al autovalor 5 son todos los múltiplos (no nulos) del vector (1, 1); otros autovectores no hay. Así por ejemplo el vector  $(2, 0) = (1, -1) + (1, 1)$  no es autovector.

**SE6)**  $\mathbf{u}$  es autovector de A si y sólo si :  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  y existe un número  $\lambda$  , tal que  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  .

si  $B = P^{-1}AP$  entonces  $A = PBP^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow A\mathbf{u} = PBP^{-1}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Rightarrow B(P^{-1}\mathbf{u}) = P^{-1}(A\mathbf{u}) = P^{-1}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(P^{-1}\mathbf{u})$  , por lo tanto, si  $\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{u}$ , se tiene :  $B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , es decir,  $\mathbf{v} = P^{-1}\mathbf{u}$  , es autovector de B asociado al mismo autovalor  $\lambda$ .



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

**SE7)** Indicando con un punto el producto escalar y con el símbolo \* el producto de matrices, "filas por columnas" se tiene :  $\lambda_1(\mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2) = (\lambda_1 \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2) = (A * \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2) = (A * \mathbf{u}_1)^t * (\mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1)^t * A^t * \mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_1)^t * A * \mathbf{u}_2 = (\mathbf{u}_1)^t * (\lambda_2 \mathbf{u}_2) = \lambda_2 (\mathbf{u}_1)^t * (\mathbf{u}_2) = \lambda_2 (\mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2)$  , luego

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2) = 0 \Rightarrow (\mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2 . \text{ [ nota : } A^t = A \text{ por ser } A \text{ simétrica ] .}$$

**SE8)** Observemos que si  $D = [d_{i,k}]$  es una matriz diagonal, con  $d_{i,i} = \lambda_i$  entonces la matriz  $B = HD$  que se obtiene multiplicando  $H$  por  $D$  a la derecha, es la matriz que se obtiene también multiplicando la  $i$ -ésima columna de  $H$  por  $\lambda_i$  (para todo  $i=1, 2, \dots, n$ ) .

A título de ejemplo :  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 5b \\ 3c & 5d \end{bmatrix}$  ;

por otra parte, por ser la  $i$ -ésima columna,  $\mathbf{a}_i$  , de  $H$  un autovector de  $A$ , asociado al autovalor  $\lambda_i$  , la  $i$ -ésima columna de la matriz  $AH$  también se obtiene multiplicando la  $i$ -ésima columna de  $H$  por  $\lambda_i$  .

**SE9)** Esto es consecuencia del resultado del ejercicio anterior : si  $P$  es invertible y si  $AP = PD$ , entonces  $\Rightarrow P^{-1}AP = P^{-1}(PD) = (P^{-1}P)D = D$  .

**SE10)** Usaremos los resultados del ejercicio **E1** de de este problemario :

$$\mathbf{SE10a)} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ; \mathbf{SE10b)} P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} ; P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} ;$$

observe que el orden en el cual aparecen los autovalores en la diagonal de la matriz diagonal, es el mismo que el orden en el cual se han puesto los autovectores en las columnas de la

matriz  $P$  ; por ejemplo , si  $H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  , entonces  $H^{-1}BH = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ;

**SE10c)**  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$  ;  $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}$  ; **SE10d)** esta matriz no es diagonalizable;

$$\mathbf{SE10e)} P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; P^{-1}EP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} ; \mathbf{SE10f)} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} ; P^{-1}FP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} ;$$

**SE10g)** esta matriz tampoco es diagonalizable.

**SE11a) Cierta :** si  $P^{-1}AP = D = \text{diagonal}$ , entonces :  $P^{-1}A^{-1}P = (P^{-1}AP)^{-1} = D^{-1} = \text{diagonal}$ ;



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

**SE11b) cierto** :  $Q^{-1} = Q^t$ ,  $Q^{-1}AQ = D \Rightarrow A = QDQ^{-1} = QDQ^t \Rightarrow$   
 $\Rightarrow A^t = (QDQ^t)^t = (Q^t)^t D^t Q^t = QDQ^t = A$ .

**SE11c) falso** : por ejemplo  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  no es diagonalizable ; si lo fuese,

debería existir una matriz invertible, P, tal que  $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

(ya que los dos autovalores de A son =1);

de esto seguiría (ya que  $I_2$  conmuta con P) :  $A = PI_2P^{-1} = PP^{-1}I_2 = I_2$ , mientras que sabemos que  $A \neq I_2$ .

**SE11d) cierto** : toda matriz diagonal es diagonalizable, tomando (para cumplir con la definición)  $P=I$  :  $P^{-1}DP = IDI = D = \text{diagonal}$ .

**SE11e) cierto** : en una matriz triangular (inferior o superior) los autovalores son los elementos de la diagonal ; también recordemos que a autovalores diferentes les corresponden autovectores linealmente independientes. De esto sigue que una matriz de tamaño  $n \times n$ , que cumpla con el enunciado de este ejercicio, tiene n autovectores linealmente independientes, por medio de los cuales se pueden formar las columnas de la matriz P, tal que  $P^{-1}AP = D$ .

**SE11f) falso** : por ejemplo, toda matriz diagonal (con elementos de su diagonal iguales o no) es diagonalizable; otro ejemplo puede ser :  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  que es diagonalizable.

**SE11g) cierto** : se puede obtener una base ortonormal para  $\mathbb{R}^n$  hallando previamente una base ortonormal (si se quiere, usando el algoritmo de Gram-Schmidt) en cada uno de los autoespacios. A título de ejemplo, ver ejercicio **E14, E12d**.

**SE12a)**  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=5$ ;  $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ;

**SE12b)**  $\lambda_1=0$ ,  $\lambda_2=2$ ,  $\lambda_3=6$ ;  $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ;

**SE12c)**  $\lambda_1=0$ ,  $\lambda_2=2$ ,  $\lambda_3=20$ ;  $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ;  $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ ;  $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$ ;





UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Departamento de Matemáticas  
Puras y Aplicadas.

MA1116 abril-julio de 2009

$$\text{SE12d)} \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7; \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

**SE13)** Recordando que si por ejemplo en la  $k$ -ésima columna de la matriz  $\mathbf{P}$  se halla el autovector asociado al autovalor  $\lambda$ , entonces la  $k$ -ésima componente de la diagonal de la matriz diagonal,  $D_{k,k}$  es  $=\lambda$ , las matrices pedidas son :  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

**SE14)** En los casos a, b, c todos los autovalores son diferentes, de manera que los autovectores que se hallan (uno para cada autovalor) son perpendiculares; por lo tanto, para obtener una base ortonormal basta dividir a cada uno de los autovectores por su módulo; en el caso **d** el autoespacio  $E_1$  tiene dimensión 2, de manera que hay que aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal en  $E_1$  (además de dividir el autovector asociado a  $\lambda_3=7$  por su módulo).

$$\text{SE14a)} \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \text{SE14b)} \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \text{SE14c)} \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} & \sqrt{5} & 1 \\ -\sqrt{6} & 2\sqrt{5} & 2 \\ 0 & -\sqrt{5} & 5 \end{bmatrix};$$

**SE14d)** Aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt en el autoespacio  $E_1 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ,

se obtiene la base ortonormal para  $E_1$  :  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  y dividiendo el vector  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

por su módulo :  $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , por lo cual  $\Rightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ .

$$\text{SE15)} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}(\mathbf{D}^n)\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \cdot (-1)^n + 2 \cdot (4^n) & 2 \cdot [(-1)^{n+1} + 4^n] \\ 3 \cdot [(-1)^{n+1} + 4^n] & 2 \cdot (-1)^{n+3} + (4^n) \end{bmatrix}.$$

$$\text{A título de ejemplo : } \mathbf{A}^{10} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2097155 & 2097150 \\ 3145725 & 3145730 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 419431 & 419430 \\ 629145 & 629146 \end{bmatrix}.$$